Wiederholung

- flacher Torus: $T^n_\Gamma = \mathbb{R}^n/\Gamma$

  mit $\Gamma = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{v_1, \dots, v_n\}$ $\qquad$ $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig

- Δ-Eigenfunktionen: $f_x([y]) := e^{2\pi i \langle x, y\rangle}$, $\qquad x \in \Gamma^*$, $y \in \mathbb{R}^n$

- Spektrum: $\mathrm{Spec}(T^n_\Gamma, g_\Gamma) = \{ 4\pi^2 \cdot \|x\|^2 \mid x \in \Gamma^* \}$

- Gegenbeispiel von Milnor

$$\Gamma(n) = \{ x + k w_n \mid x \in \mathbb{Z}^n, \textstyle\sum_i x_i \equiv 0 \bmod 2, \ k \in \mathbb{N} \}$$

wobei: $w_n = \frac{1}{2}(1, \dots, 1)$

$n \equiv 0 \mod 8$

RW 1: $\quad \forall x \in \Gamma(n): \ \|x\|^2 \equiv 0 \mod 2$

RW 2: $\quad \Gamma(n) = \Gamma(n)^*$

Schon gezeigt: Die flachen Tori zu $\Gamma(16)$ und $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ sind nicht isometrisch

noch zu zeigen: Die flachen Tori zu $\Gamma(16)$ und $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ sind isospektral

dazu betrachtet man:

$$\Theta_\Gamma(t) = Z\left(\frac{t}{2\pi}\right) = \sum_{x \in \Gamma^*} e^{-\pi \|x\|^2 t}$$

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ mit RW1 und RW2

Zz: $\Theta_\Gamma = \Theta_{\Gamma'} \quad \Rightarrow \quad$ Isospektralität

Summenformel von Poisson liefert:

$$\Theta_\Gamma(t) = t^{-\frac{n}{2}} \Theta_\Gamma\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_\Gamma(z) = z^{-\frac{n}{2}} \Theta_\Gamma\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \forall \; z \text{ mit } \operatorname{Re} z > 0$$

Theta-Reihe zu Γ:

$$\hat{\Theta}_\Gamma(z) := \Theta_\Gamma(-iz) = \sum_{x \in \Gamma^*} e^{i\pi z \|x\|^2}$$

$\hat{\Theta}_\Gamma$ ist holomorph auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$

Lemma:

1. $\hat{\Theta}_\Gamma(z) = z^{-\frac{n}{2}} \hat{\Theta}_\Gamma\left(-\frac{1}{z}\right)$
2. $\hat{\Theta}_\Gamma(z) = \hat{\Theta}_\Gamma(z+1)$
3. $\hat{\Theta}_\Gamma(z) \to 1$ für $\operatorname{Im} z \to \infty$

Beweis: 1: schon gezeigt

zu 2:

$$\hat{\Theta}_\Gamma(z+1) = \sum_x e^{i\pi z \|x\|^2} \cdot e^{i\pi \|x\|^2} = \hat{\Theta}_\Gamma(z)$$

da: $e^{i\pi \|x\|^2} = 1$, denn $x \in \Gamma(n)$: $\|x\|^2 \equiv 0 \mod 2$ (RW 1)

zu 3: $z = u + iv$

$$\hat{\Theta}_\Gamma(z) = \sum_{x \in \Gamma^*} e^{i\pi u \|x\|^2} \cdot e^{-\pi v \|x\|^2}$$

für $v \to \infty$ liefert in der Summe nur der Summand zu $x = 0$ einen Beitrag

Modulformen

Sei $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$ die obere Halbebene

$SL(2,\mathbb{Z}) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z}) \mid a \cdot d - bc = 1 \}$

operiert auf $\mathbb{H}$:

(Möbius-Transformation; konf. Abb. (S^2, g_{st}); Isometrie von (H^2, g_H))

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

da $\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$

Modulgruppe: $G := SL(2,\mathbb{Z}) / \mathbb{Z}_2$ da $\pm \mathrm{Id}$ operieren trivial auf $\mathbb{H}$

$(= PSL(2,\mathbb{Z}))$

Man betrachtet die speziellen Elemente:

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$z \mapsto -\frac{1}{z}$ $\qquad$ $z \mapsto z+1$

Satz: Die Elemente S und T erzeugen $SL(2,\mathbb{Z})$.
Genauer gilt:

$$G = \langle S, T \mid S^2, (TS)^3 \rangle$$

es gilt: (i) $S^2 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $(TS)^3 = E$

Bemerkung: Ein Fundamentalbereich der $SL(2,\mathbb{Z})$-Wirkung auf $\mathbb{H}$ ist die Menge:

$$D = \{ z \in \mathbb{H} \mid -\tfrac{1}{2} \leq \operatorname{Im}(z) \leq \tfrac{1}{2},\ |z| \geq 1 \}$$

Definition: Eine Modulform vom Gewicht k ist eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit:

(i) $$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k \, f(z)$$

für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$

(ii) f ist holomorph im Unendlichen, d.h. f hat eine Potenzreihenentwicklg

$$f(z) = \hat{f}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi i z}$$

Bemerkung:
- Die Bedingung (i) ist äquivalent zu:

$$f(z+1) = f(z) \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$$

- Die Modulgruppe operiert auf Gittern in $\mathbb{R}^2$ und überführt diese in sich: !

Sei $\Gamma = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \{v_1, v_2\}$ $\quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

mit $\tau := \frac{v_1}{v_2} \notin \mathbb{R}$

neue Basis $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ d.h. $\Gamma = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \{w_1, w_2\}$

das entspricht der Transformation $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$

Beispiel: Eisenstein-Reihen

$$G_k(\Gamma) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ \neq (0,0)}} \frac{1}{(mv_1+nv_2)^k}$$

$$G_k(\tau) := \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ \neq (0,0)}} \frac{1}{(m+n\tau)^k} \quad \text{für } \tau = \frac{v_1}{v_2} \in \mathbb{H}$$

normalisierte Eisenstein-Reihen

$$G_k(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, q^n \qquad q = e^{2\pi i \tau} \qquad k \geq 4!$$

$\tau = it \quad , t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad G_k(it) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-2\pi t n}$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \lim_{t \to \infty} G_k(it)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \sum_{\substack{(m,n) \\ \neq (0,0)}} \frac{1}{(mit + n)^k} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n^k} = 2\,\zeta(k)$$

$$\Rightarrow \quad E_k(\tau) = \frac{1}{2\zeta(k)} \, G_k$$

Satz: $\quad E_k(z) = 1 - \dfrac{2k}{B_k} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) \, q^n$

$(z=\tau)$ $\quad$ mit: B_k : $k$te Bernoulli-Zahl, $\quad \sigma_\ell(n) = \sum_{d \mid n} d^\ell$

<u>Beispiel</u>: $\quad E_4(z) = 1 + 240 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) \, q^n$

Umformulierung:

Theta - Funktionen

Definition: Die Theta - Funktion (oder Theta - Reihe) eines Gitters $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\Theta_\Gamma(\tau) = \sum_{x \in \Gamma} e^{\pi i \tau \cdot \|x\|^2}$$

$$= \sum_k A_\Gamma(k) e^{\pi i \tau k}$$

wobei $A_\Gamma(k) = \# \{ x \in \Gamma \mid \|x\| = k \}$

Lemma: Die Theta - Funktion Θ_Γ ist holomorph auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$.

Bemerkung:
- Γ heißt gerade $\Leftrightarrow$ $\|x\|^2 \equiv 0 \mod 2 \quad \forall x \in \Gamma$ (EW 1)
- Γ heißt unimodular $\Leftrightarrow$ $\mathrm{vol}(\Gamma) = 1$ (EW 2)

  $\Leftrightarrow$ $\Gamma = \Gamma^*$

Lemma: Ist $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ unimodular und gerade, so folgt $8 \mid n$.

Satz: Die Theta - Funktion eines unimodularen, geraden Gitters in $\mathbb{R}^n$ definiert eine Modulform vom Grad $n/2$.

Bemerkung: Die Theta - Funktion eines Gitters enthält i. A. nicht die volle Information. Z.B. haben die Gitter $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ und $\Gamma(16)$ die gleiche Theta-Funktion sind aber nicht isometrisch

Satz: Die Eisenstein-Reihe G_k ist eine Modulform vom Gewicht k, für k gerade und $k \geq 4$.

Bemerkung: Die Menge der Modulformen ist eine Algebra, man kann Modulformen addieren und (punktweise) multiplizieren, wobei sich das Gewicht addiert.

Sei M_k der Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k.

normalisierte Eisensteinreihen
$\rightarrow E_k(z) = 1 + \dots$

Satz: Die Algebra der Modulformen ist isomorph zur Polynomalgebra $\mathbb{C}[E_4, E_6]$

Folgerung:
- $M_k = 0$ für $k \equiv 1\ (2)$, $k < 0$ oder $k = 2$
- $M_0 = \mathbb{C}$
- $M_k = \mathbb{C} \cdot E_k$ für $k = 4, 6, 8, 10$!
- $\dim M_k = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right] & k \equiv 2 \mod 12 \\ \left[\frac{k}{12}\right] + 1 & k \not\equiv 2 \mod 12 \end{cases}$

Beispiel: $M_8 = \mathbb{C}\, E_4^8$

Satz: $\hat{\Theta}_\Gamma$ mit Γ wie oben ist eine Modulform vom Gewicht $n/2$.

Folgerung: Sind Γ und Γ' zwei Gitter in $\mathbb{R}^n$ für $n = 8, 12, 16$, oder 20 mit den Eigenschaften RW1 und RW2. Dann sind die entsprechenden Tori isospektral

Beweis.
- $\dim M_{\frac{n}{2}} = 1$ für $n = 8, 12, 16$ oder 20
- die Grenzwerteigenschaft aus dem Lemma legt dann
$$\hat{\Theta}_\Gamma \in M_{\frac{n}{2}}$$
eindeutig fest.

$\Rightarrow$ **Folgerung:** Die Tori zu $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ und $\Gamma(16)$ sind isospektral aber nicht isometrisch

Sei q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$

d.h. $B_q(v,w) := q(v+w) - q(v) - q(w)$ ist ein Skalarprodukt

<u>Bemerkung:</u>

- Quadratische Formen auf $\mathbb{R}^n$ entsprechen positiv-definiten, symmetrischen $n\times n$-Matrizen

  Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ symmetrisch und positiv-definit man definiert die quadratische Form zu A durch

  $$q_A(v) := \langle v, Av \rangle = v^T \cdot A \cdot v$$

- Zu jeder quadratischen Form q definiert man eine Theta-Funktion durch

  $$\Theta_q(\tau) = \sum_{v\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i \tau q(v)}$$

Sei A die Gramsche Matrix zum Gitter $\Gamma = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{v_1, \dots, v_n\}$

$\rightarrow A = (A_{ij})$ mit $A_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$

$\rightarrow \Theta_{q_A} = \Theta_\Gamma$

Gitter
$\updownarrow$
quadratische Form

<u>da:</u> $v = \sum a_j v_j \rightarrow \|v\|^2 = \langle a, Aa \rangle$

<u>Bemerkung:</u> Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$

v_i als Spaltenvektor in der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$

$\rightarrow B^T \cdot B = A$

$\rightarrow \det A = (\det B)^2$

d.h. $\operatorname{vol}(\Gamma) = \sqrt{\det A} = |\det B|$

<u>Beispiel:</u> $A = E$ äquivalent: $\Gamma = \mathbb{Z}^n$

$q(v) = v_1^2 + \dots + v_n^2$ $\quad v_i \in \mathbb{Z}$!

$$\Theta_q(\tau) = \sum_k r_n(k)\, e^{\pi i \tau k}$$

wobei $r_n(k)$ = Anzahl der Möglichkeiten k als Summe von n Quadraten ganzer Zahlen zu schreiben

Θ_q ist keine Modulform zu $SL(2,\mathbb{Z})$
aber bzgl. $\Gamma = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}}_{T^2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}}_{S} \rangle$. $\rightsquigarrow$ Formeln für $r_n(k)$